

Przykład. 3

Y – wydatki rządowe (mln euro) Polski w latach 2000-2008 wynosiły; (Dane-2)

Rok	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Y	76,293	92,913	92,703	85,561	87,053	106,107	119,194	130,815	156,011

Obliczenia wykonamy w tabelce:

rok	t	y_t	$t \cdot y_t$	y_t^2
2000	1	76,293	76,293	5820,622
2001	2	92,913	185,826	8632,826
2002	3	92,703	278,109	8593,846
2003	4	85,561	342,244	7320,685
2004	5	87,053	435,265	7578,225
2005	6	106,107	636,642	11258,7
2006	7	119,194	834,358	14207,21
2007	8	130,815	1046,52	17112,56
2008	9	156,011	1404,099	24339,43
	45	946,65	5239,356	104864,1

$$n = 9$$

Obliczamy wartości średnie:

$$\bar{t} = \frac{n+1}{2} = (9+1)/2 = 5$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_t}{n} = \frac{946,65}{9} = 105,183$$

Obliczamy oszacowane parametry modelu

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 t$$

Mamy

$$b_1 = \frac{12(\sum t y_t - \bar{t} \sum y_t)}{n(n^2 - 1)} = \frac{12(5239,356 - 5 \cdot 946,65)}{9(81 - 1)} = 8,4351$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{t} = 105,183 - 8,4351 \cdot 5 = 63,0078$$

Otrzymane równanie trendu liniowego ma postać

$$\hat{Y} = 63,0078 + 8,4351t$$

Wniosek: W Polsce przeciętnie z roku na rok wydatki rządowe rosły o ok. 8 435 100 euro.

Obliczamy wariancję resztową

$$s_e^2 = \frac{\sum_{t=1}^n y_t^2 - b_0 \sum_{t=1}^n y_t - b_1 \sum_{t=1}^n ty_t}{n-2} =$$

$$= \frac{1048641 - 63,0078 \cdot 946,65 - 8,435 \cdot 5239,356}{9-2} = 146,1782$$

zatem

$$s_e = \sqrt{s_e^2} = \sqrt{146,1782} = 12,09$$

Dopasowanie modelu do danych empirycznych oceniamy współczynnikiem zmienności resztowej V_e .

$$V_e = \frac{S_e}{\bar{y}} = \frac{12,09}{105,183} = 11,49 \%$$

Wniosek: Mała wartość współczynnika zmienności świadczy o **dobrym** dopasowaniu modelu do danych empirycznych. Wynik jest **pozytywny** dla modelu.

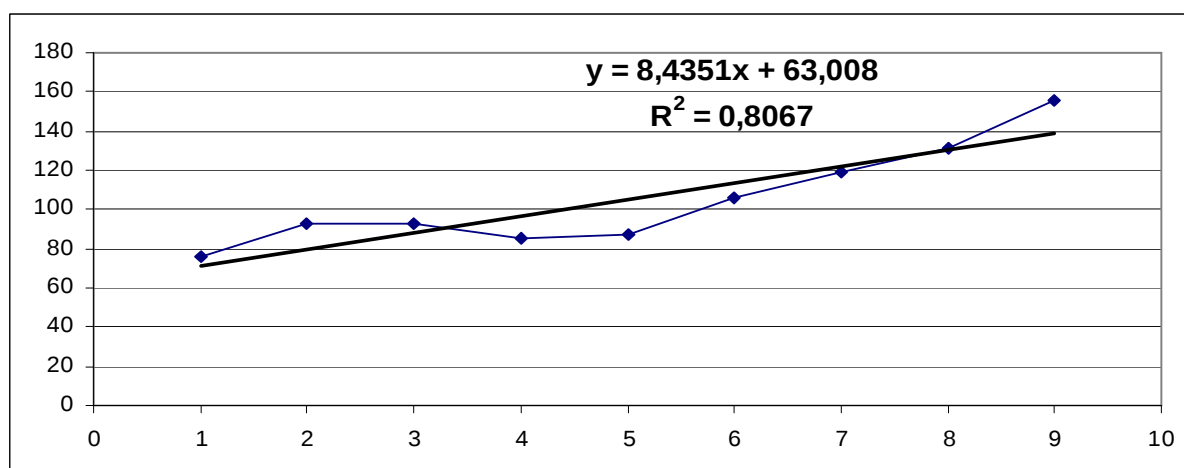
Dopasowanie modelu do danych empirycznych oceniamy też współczynnikiem determinacji

$$R^2 = \frac{b_1(\sum ty_t - n\bar{t}\bar{y})}{\sum y_t^2 - n(\bar{y})^2} =$$

$$= \frac{8,435(5239,356 - 9 \cdot 5 \cdot 105,183)}{1048641 - 9 \cdot (105,183)^2} = 0,81 = 81\%$$

Wniosek: Duża wartość współczynnika determinacji świadczy o **dobrym** dopasowaniu modelu do danych empirycznych. Rozpatrywany model wyjaśnia ok. 81% całkowitej zmienności wydatków rządowych. Wynik jest **pozytywny** dla modelu.

Wykres danych i równania trendu.



Przykład. 4

Y – wydatki rządowe (mln euro) Finlandii w latach 2000-2008; (Dane-2)

Wiadomo, że

$$\sum_{t=1}^n y_t = 685,497$$

$$\sum_{t=1}^n ty_t = 3615,256$$

$$\sum_{t=1}^n y_t^2 = 52803,14$$

$$n = 9$$

Obliczamy wartości średnie:

$$\bar{t} = \frac{n+1}{2} = (9+1)/2 = 5$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_t}{n} = \frac{685,497}{9} = 76,166$$

Obliczamy oszacowane parametry modelu

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 t$$

Mamy

$$b_1 = \frac{12(\sum ty_t - \bar{t} \sum y_t)}{n(n^2 - 1)} = \frac{12(3615,256 - 5 \cdot 685,497)}{9(81 - 1)} = 3,13$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{t} = 76,166 - 3,13 \cdot 5 = 60,52$$

Otrzymane równanie trendu liniowego ma postać

$$\hat{Y} = 60,52 + 3,13t$$

Wniosek: W Finlandii przeciętnie z roku na rok wydatki rządowe rosły o ok. 3 130 000 euro.

Obliczamy wariancję resztową

$$s_e^2 = \frac{\sum_{t=1}^n y_t^2 - b_0 \sum_{t=1}^n y_t - b_1 \sum_{t=1}^n t y_t}{n - 2} =$$

$$= \frac{52803,14 - 60,52 \cdot 685,497 - 3,13 \cdot 3615,256}{9 - 2} = 0,531$$

zatem

$$s_e = \sqrt{s_e^2} = \sqrt{0,531} = 0,73$$

Wyznamy prognozę na rok 2009 i 2010 i ocenimy jej błąd.

Przewidywane wydatki w **roku 2009**:

$$y_{\tau}^* = b_0 + b_1 t_{\tau} = 60,52 + 3,13 \cdot 10 = 91,814$$

Zatem przewidujemy, że w roku 2009 wydatki wyniosą około 91 814 000 euro.

Standardowy błąd tej prognozy wynosi

$$s_{\tau} = s_e \sqrt{1 + \frac{2(2n+1) + \frac{12t_{\tau}^2}{n+1} - 12t_{\tau}}{n^2 - n}} =$$

$$= 0,73 \sqrt{1 + \frac{2(2 \cdot 9 + 1) + \frac{12 \cdot 10^2}{9+1} - 12 \cdot 10}{9^2 - 9}} = 0,901$$

Zatem w roku 2009 wydatki wyniosą około 91 814 000 ± 901 000 euro.

Jakość prognozy możemy ocenić błędem względnym

$$\delta_{\tau} = \frac{s_{\tau}}{y_{\tau}} \cdot 100\% = \frac{0,901}{91,814} \cdot 100\% = 1\%$$

Zatem prognoza **jest dopuszczalna** (bardzo mały błąd względny).

Przewidywane wydatki w **roku 2010**:

$$y_{\tau}^* = b_0 + b_1 t_{\tau} = 60,52 + 3,13 \cdot 11 = 94,943$$

Zatem przewidujemy, że w roku 2010 wydatki wyniosą około 94 943 000 euro.

Standardowy błąd tej prognozy wynosi

$$s_{\tau} = s_e \sqrt{1 + \frac{2(2n+1) + \frac{12t_{\tau}^2}{n+1} - 12t_{\tau}}{n^2 - n}} =$$
$$= 0,73 \sqrt{1 + \frac{2(2 \cdot 9 + 1) + \frac{12 \cdot 11^2}{9+1} - 12 \cdot 11}{9^2 - 9}} = 0,953$$

Zatem w roku 2010 wydatki wyniosą około 94 943 000 $\pm$ 953 000 euro.

Jakość prognozy możemy ocenić błędem względnym

$$\delta_{\tau} = \frac{s_{\tau}}{y_{\tau}} \cdot 100\% = \frac{0,953}{94,943} \cdot 100\% = 1\%$$

Zatem prognoza **jest dopuszczalna** (bardzo mały błąd względny).

Przykład. 5

Liczba maturzystów (tys. osób) w pewnym województwie w latach 1991-1999 wynosiła;

Rok	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Y	3,8	6	7,5	7,5	9,2	9,9	12,3	13,2	13,4

Obliczenia wykonamy w tabelce:

rok	t	y_t	$t \cdot y_t$	y_t^2
1991	1	3,8	3,8	14,44
1992	2	6	12	36
1993	3	7,5	22,5	56,25
1994	4	7,5	30	56,25
1995	5	9,2	46	84,64
1996	6	9,9	59,4	98,01
1997	7	12,3	86,1	151,29
1998	8	13,2	105,6	174,24
1999	9	13,4	120,6	179,56
	45	82,8	486	850,68

$$n = 9$$

Obliczamy wartości średnie:

$$\bar{t} = \frac{n+1}{2} = (9+1)/2 = 5$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_t}{n} = \frac{82,8}{9} = 9,2$$

Obliczamy oszacowane parametry modelu

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 t$$

Mamy

$$b_1 = \frac{12(\sum t y_t - \bar{t} \sum y_t)}{n(n^2 - 1)} = \frac{12(486 - 5 \cdot 82,8)}{9(81 - 1)} = 1,2$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{t} = 9,2 - 1,2 \cdot 5 = 3,2$$

Otrzymane równanie trendu liniowego ma postać

$$\hat{Y} = 3,2 + 1,2t$$

Wniosek: W rozpatrywanym województwie przeciętnie z roku na rok przybywało ok. 1200 maturzystów.

Obliczamy wariancję resztową

$$s_e^2 = \frac{\sum_{t=1}^n y_t^2 - b_0 \sum_{t=1}^n y_t - b_1 \sum_{t=1}^n ty_t}{n-2} = \frac{850,68 - 3,2 \cdot 82,8 - 1,2 \cdot 486}{9-2} = 0,36$$

zatem

$$s_e = \sqrt{s_e^2} = \sqrt{0,36} = 0,6$$

Dopasowanie modelu do danych empirycznych oceniamy współczynnikiem zmienności resztowej V_e .

$$V_e = \frac{S_e}{\bar{y}} = \frac{0,6}{9,2} = 6,52\%$$

Wniosek: Mała wartość współczynnika zmienności świadczy o **dobrym** dopasowaniu modelu do danych empirycznych. Wynik jest **pozytywny** dla modelu.

Dopasowanie modelu do danych empirycznych oceniamy też współczynnikiem determinacji

$$R^2 = \frac{b_1(\sum ty_t - n\bar{t}\bar{y})}{\sum y_t^2 - n(\bar{y})^2} = \frac{1,2(486 - 9 \cdot 5 \cdot 9,2)}{850,68 - 9 \cdot (9,2)^2} = 0,97 = 97\%$$

Wniosek: Duża wartość współczynnika determinacji świadczy o **dobrym** dopasowaniu modelu do danych empirycznych. Rozpatrywany model wyjaśnia ok. 97% całkowitej zmienności liczby maturzystów. Wynik jest **pozytywny** dla modelu.

Wyznaczymy prognozę na rok 2000 i 2001 i ocenimy jej błąd.

Przewidywana liczba maturzystów w **roku 2000**:

$$y_{\tau}^* = b_0 + b_1 t_{\tau} = 3,2 + 1,2 \cdot 10 = 15,2$$

Zatem przewidujemy, że w roku 2000 będzie około 15200 maturzystów.

Standardowy błąd tej prognozy wynosi

$$s_{\tau} = s_e \sqrt{1 + \frac{2(2n+1) + \frac{12t_{\tau}^2}{n+1} - 12t_{\tau}}{n^2 - n}} =$$

$$= 0,6 \sqrt{1 + \frac{2(2 \cdot 9 + 1) + \frac{12 \cdot 10^2}{9+1} - 12 \cdot 10}{9^2 - 9}} = 0,742$$

Zatem w roku 2000 będzie około 15200 ± 742 maturzystów.

Jakość prognozy możemy ocenić błędem względnym

$$\delta_{\tau} = \frac{s_{\tau}}{y_{\tau}} \cdot 100\% = \frac{0,742}{15,2} \cdot 100\% = 4,9\%$$

Zatem prognoza **jest dopuszczalna** (ma mały błąd względny).

Przewidywana liczba maturzystów w roku 2001:

$$y_{\tau}^* = b_0 + b_1 t_{\tau} = 3,2 + 1,2 \cdot 11 = 16,4$$

Zatem przewidujemy, że w roku 2001 będzie około 16400 maturzystów.

Standardowy błąd tej prognozy wynosi

$$s_{\tau} = s_e \sqrt{1 + \frac{2(2n+1) + \frac{12t_{\tau}^2}{n+1} - 12t_{\tau}}{n^2 - n}} =$$

$$= 0,6 \sqrt{1 + \frac{2(2 \cdot 9 + 1) + \frac{12 \cdot 11^2}{9+1} - 12 \cdot 11}{9^2 - 9}} = 0,785$$

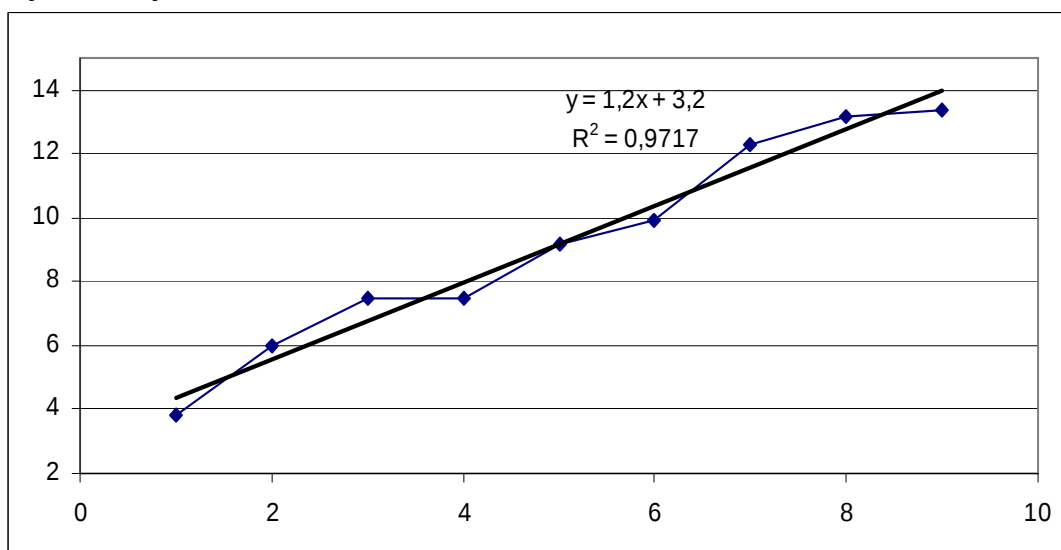
Zatem w roku 2001 będzie około 16400 ± 785 maturzystów.

Jakość prognozy możemy ocenić błędem względnym

$$\delta_{\tau} = \frac{s_{\tau}}{y_{\tau}} \cdot 100\% = \frac{0,785}{16,4} \cdot 100\% = 4,8\%$$

Zatem prognoza **jest dopuszczalna** (ma mały błąd względny).

Wykres danych i równania trendu.



L.Kowalski, 10.03.2010,